

# مفاهيم الرياضيات التطبيقية

# استاتيكا

## الصف الثالث الثانوى

# الاحتكاك

**السطوح الملساء** : تنعدم قوى الاحتكاك فيها تمامًا ويكون معامل الاحتكاك = صفر ( وهى سطوح افتراضية )

**السطوح الخشنة** : تظهر فيها قوى الاحتكاك ويكون معامل الاحتكاك فيها يساوى عددًا حقيقيًا موجبًا اكبر من الصفر.

**رد الفعل :**

- فى حالة السطوح الملساء : يكون رد الفعل عموديًا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين.
- فى حالة السطوح الخشنة : يكون رد الفعل غير معلوم الاتجاه حيث يتوقف على طبيعة السطحين المتلامسين كما يتوقف على القوى الأخرى المؤثرة على الجسم.

**قوة الاحتكاك السكونى :**

تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن ويكون اتجاهها معاكس للاتجاه الذى يميل الجسم إلى الحركة فيه وتعطى قيمتها بالمتباينة ( $\text{٠} < \text{ع} \leq \text{م}_{\text{س}}\,\text{ر}$ ) حيث : $\text{م}_{\text{س}}$ هو معامل الاحتكاك السكونى.

**قوة الاحتكاك السكونى النهائى :**

عندما تصل قوة الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى يكون الجسم عندها على وشك الحركة ( دون أن يتحرك ) ويكون الاحتكاك عندها نهائيًا ويرمز له بالرمز ( $\text{ع}_{\text{س}}$ )

وتكون : $\text{ع}_{\text{س}} = \text{م}_{\text{س}}\,\text{ر}$

**قوة الاحتكاك الحركى :**

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى يكون اتجاهها عكس اتجاه حركته ، وتعطى قيمتها بالعلاقة : $\text{ع}_{\text{ك}} = \text{م}_{\text{ك}}\,\text{ر}$ حيث $\text{م}_{\text{ك}}$ هو معامل الاحتكاك الحركى.

**ملاحظات على معامل الاحتكاك السكونى والحركى :**

- $\text{م}_{\text{س}}$ ، $\text{م}_{\text{ك}}$ يعتمد كل منهما على طبيعة الجسمين المتلامسين ، لكنه لايعتمد على مساحة السطوح المتماسة أو كتلة الجسم المتحرك.
- معامل الاحتكاك السكونى ( $\text{م}_{\text{س}}$ ) > معامل الاحتكاك الحركى ( $\text{م}_{\text{ك}}$ )

**رد الفعل المحصل ( $\acute{ر}$ ) :** هو محصلة قوة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{ر}$ وقوة الاحتكاك النهائى $ع_س$

**زاوية الاحتكاك :** الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل العمودى وقوة رد الفعل المحصل.

( في حالة الاحتكاك النهائي)

**العلاقة بين معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك :** معامل الاحتكاك = ظل زاوية الاحتكاك

**العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى :**

إذا وُضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

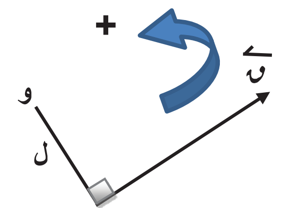
## العزوم

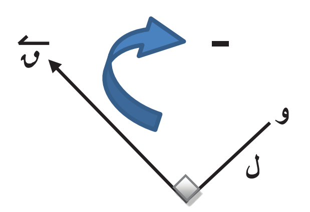
**عزم قوة بالنسبة لنقطة :** يُعرف عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ المؤثرة على جسم حول النقطة ( و ) بأنه مقدرة القوة $\overleftarrow{ق}$ على احداث دوران للجسم حول نقطة ( و ).

ويحسب عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ من العلاقة : $\overleftarrow{ج}_و = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$ حيث : $\overleftarrow{ر}$ متجه موضع نقطة على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة ( و ) ويكون اتجاه العزم عمودى على المستوى الذى يحوى كل من $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$

**معيار عزم قوة بالنسبة لنقطة :** إذا كان ق يمثل معيار القوة $\overleftarrow{ق}$ ، ل يمثل طول العمود الساقط من النقطة ( و ) على خط عمل القوة فإن : معيار عزم $\overleftarrow{ق}$ حول النقطة ( و ) يحسب من العلاقة : $\| \overleftarrow{ج}_و \| = ق\ ل$

**القياس الجبرى لعزم قوة بالنسبة لنقطة :**




إذا كانت القوة تعمل على دوران الجسم حول نقطة ( و ) فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة فإن القياس الجبرى لمتجه عزم القوة يكون موجبًا ، وإذا كانت القوة تعمل على دوران الجسم حول نقطة ( و ) مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن القياس الجبرى لمتجه عزم القوة يكون سالبًا.

☚ طول العمود المرسوم من نقطة ( و ) على خط عمل $\overleftarrow{ق}$ هو ل حيث : $ل = \frac{\| \overleftarrow{ج}_و \|}{\| \overleftarrow{ق} \|}$

- إذا تلاشى عزم قوة بالنسبة لنقطة فإن خط عمل القوة يمر بهذه النقطة.

- **مبدأ العزوم ( نظرية فارينون )** عزم القوة $\overline{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة للنقطة نفسها.

- **نظرية :** مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها.

- إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول نقطة أ = مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب كان خط عمل المحصلة موازيًا $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

- إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول نقطة أ = − مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب كان خط عمل المحصلة ينصف $\overline{\text{أ ب}}$

- عزم قوة بالنسبة لنقطة فى الفراغ : $\overline{\text{ج}}_{\text{و}} = \overline{\text{ر}} \times \overline{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

حيث : $\overline{\text{ر}}$ متجه موضع نقطة على خط عمل القوة بالنسبة لنقطة الأصل

- مركبات عزوم قوة فى اتجاه المحاور إذا كانت : $\overline{\text{ق}} = (\text{ق}_{\text{س}} ، \text{ق}_{\text{ص}} ، \text{ق}_{\text{ع}})$ قوة تؤثر فى نقطة متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل $\overline{\text{ر}} = (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع})$ فإن :

$(\text{ص ق}_{\text{ع}} - \text{ع ق}_{\text{ص}})$ مركبة عزم $\overline{\text{ق}}$ فى اتجاه محور س

$(\text{ع ق}_{\text{س}} - \text{س ق}_{\text{ع}})$ مركبة عزم $\overline{\text{ق}}$ فى اتجاه محور ص

$(\text{س ق}_{\text{ص}} - \text{ص ق}_{\text{س}})$ مركبة عزم $\overline{\text{ق}}$ فى اتجاه محور ع

# القوى المتوازية المستوية

## محصلة قوتين متوازيتين وفى نفس الاتجاه

$\overline{ق_١} = ق_١ \overleftarrow{ى}$ ، $\overline{ق_٢} = ق_٢ \overleftarrow{ى}$ تؤثران فى أ ، ب فإن :

المحصلة : $\overleftarrow{ح} = \overline{ق_١} + \overline{ق_٢}$ وتؤثر فى نقطة حـ $\in \overline{أ ب}$ بحيث : أ حـ × $ق_١$ = ب حـ × $ق_٢$

## محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه

$\overline{ق_١} = ق_١ \overleftarrow{ى}$ ، $\overline{ق_٢} = - ق_٢ \overleftarrow{ى}$ ( $ق_١ > ق_٢$ ) تؤثران فى أ ، ب فإن :

المحصلة : $\overleftarrow{ح} = \overline{ق_١} + \overline{ق_٢}$ = $(ق_١ - ق_٢)\overleftarrow{ى}$ وتؤثر فى نقطة حـ $\in \overleftarrow{ب أ}$ ، حـ $\notin \overline{أ ب}$

بحيث : أ حـ × $ق_١$ = ب حـ × $ق_٢$

## عزوم القوى المتوازية المستوية

نظرية ( مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة )

## محصلة عدة قوى متوازية

إذا كانت القوى $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ، ......... ، $\overline{ق_ن}$ متوازية وتأثر فى النقط $أ_١$ ، $أ_٢$ ، .... ، $أ_ن$

فإن : محصلتها هى $\overleftarrow{ح}$ حيث : $\overleftarrow{ح} = \overline{ق_١} + \overline{ق_٢} + ....... + \overline{ق_ن}$ وتؤثر فى نقطة حـ حيث :

$$أ_١ حـ = \frac{\| \text{مجموع عزوم القوى حول } أ_١ \|}{\| \overleftarrow{ح} \|}$$

## اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

قاعدة : إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

← مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى ( بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها ) يساوى صفرًا ( المحصلة = صفر )

← مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستواها يساوى صفرًا

## الاتزان العام

☺ إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين ، فإنه يمكن نقل نقطة تأثير أى من القوتين إلى نقطة أخرى على خط عملها دون أن يؤثر ذلك فى اتزان الجسم.

☺ إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ، ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى ، فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

☺ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية وغير متوازية ، فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

☺ شروط اتزان جسم تحت تأثير عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة :

- ❖ المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ = صفر
- ❖ المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ = صفر

انعدام عزم مجموعة القوي بالنسبة لاي نقطة:

تتوازن عزوم الدوران المؤثرة علي جسم في اتجاه دوران عقارب الساعة مع عزوم الدوران في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة حتي يكون الجسم في حالة اتزان.

الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوي المستوية:

لكي تتزن مجموعة من القوي المستوية يلزم ويكفي ان تتحقق الشروط الاتية:

- ❖ ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوي في اتجاهين متعامدين واقعين في مستواها.
- ❖ ينعدم مجموع المركبات الجبرية لعزوم القوي بالنسبة لنقطة واحدة في مستواها.

ويمكن التعبير رياضياً عن هذه الشروط كالآتي:

س = صفر ، ص = صفر ج = صفر

## الازدواجات

🗔 تعريف الازدواج : هو نظام من القوى يتكون من قوتين متساويتان فى المعيار ومتضادتين فى الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد.

🗔 عزم الازدواج : يعرف عزم الازدواج بأنه مجموع عزمى قوتى الازدواج حول أى نقطة فى الفراغ ومعياره يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البُعد بينهما.

🗔 نظرية : عزم الازدواج هو متجه ثابت لايعتمد على النقطة التى يُنسب إليها عزمى قوتيه.

**اتزان ازدواجين :** يُقال لازدواجين أنهما متزنان إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.

**اتزان جسم تحت تأثير عدة ازدواجات :**

إذا أثر على الجسم عدة ازدواجات مستوية متجهات عزمها هى : $\overline{ج_1}$ ، $\overline{ج_2}$ ، ........ ، $\overline{ج_ن}$

فإن : شرط اتزان الجسم تحت تأثير هذه الازدواجات هو : $\overline{ج_1} + \overline{ج_2} + ........ + \overline{ج_ن} = \overline{و}$

**تكافؤ ازدواجين:** يُقال لازدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.

**نظام القوى المستوية التى تكافئ ازدواج :**

يُقال لعدة قوى مستوية $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ ، ........ ، $\overline{ق_ن}$ أنها تكافئ ازدواج إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :

- محصلة القوى تساوى المتجه الصفرى ($\overline{ق_1} + \overline{ق_2} + ........ + \overline{ق_ن} = \overline{و}$)
- مجموع عزوم القوى حول أى نقطة فى الفراغ لاينعدم.

**قاعدة ( ١ ) :** إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلًا تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

**تعميم:** إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلا تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، كانت هذه المجموعة تكافىء ازدواجًا معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الطوال.

**قاعدة ( ٢ ) :** إذا كان مجموع القياسات لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدار ثابت لايساوى الصفر ، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

**الازدواج المحصل :** يُعرف مجموع ازدواجين مستويين $\overline{ج_1}$ ، $\overline{ج_2}$ على أنه الازدواج الذى عزمه مجموع عزمى هذين الازدواجين حيث ( $\overline{ج} = \overline{ج_1} + \overline{ج_2}$ )

# مركز الثقل

❋ **مركز ثقل جسم جاسئ :** هو نقطة ثابتة فى الجسم يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم ، ولايتغير موضعها بالنسبة للجسم ، مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض.

❋ **ملاحظات على مركز الثقل :** مركز ثقل الجسم الجاسئ يتغير بتغير شكله ، وذلك لتغير الأبعاد بين الجسيمات المكونه له.

❋ **الجسم المنتظم الكثافة :** هو الجسم الذى تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.

❋ **متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل :**

إذا كانت : $ك_1$ ، $ك_2$ ، $ك_3$ ، ..... ، $ك_ن$ كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ،

$\overline{ر_1}$ ، $\overline{ر_2}$ ، ......... ، $\overline{ر_ن}$ متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل

فإن متجه الموضع $\overline{ر_م}$ لمركز ثقل الجسم الجاسئ منسوبًا إلى نقطة الأصل يتحدد من العلاقة :

$$\overline{ر_م} = \frac{ك_1 \overleftarrow{ر_1} + ك_2 \overleftarrow{ر_2} + ك_3 \overleftarrow{ر_3} + \cdots\cdots + ك_ن \overleftarrow{ر_ن}}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + \cdots\cdots + ك_ن}$$

ويُعبر عنها بدلالة مركبات مركز الثقل فى نظام الاحداثيات الديكارتية المتعامدة كالآتى :

$$س_م = \frac{ك_1 س_1 + ك_2 س_2 + ك_3 س_3 + \cdots\cdots + ك_ن س_ن}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + \cdots\cdots + ك_ن}$$

$$ص_م = \frac{ك_1 ص_1 + ك_2 ص_2 + ك_3 ص_3 + \cdots\cdots + ك_ن ص_ن}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + \cdots\cdots + ك_ن}$$

**❋ التعليق الحر للجسم الجاسئ :** يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقًا حرًا على الخط المستقيم الرأسى المار بنقطة التعليق.

**❋ مركز ثقل قضيب رفيع منتظم :** مركز ثقل قضيب رفيع منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.

**❋ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازى أضلاع :** مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بشكل متوازى الأضلاع يقع عند مركزها الهندسى ( نقطة تلاقى قطرى متوازى الضلاع )

**❋ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث :** مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث.

**❋ طريقة الكتل السالبة :** باعتبار أن كتلة الجسم الأصلى ( ك ) والجزء المقتطع ( باعتبار أن كتلته سالبة ) هو ( − $ك_1$) فإن كتلة الجزء المتبقى (ك − $ك_1$ ) لذلك فإن : $\overrightarrow{ر_م}$ تُعطى بالعلاقة :

$$\overrightarrow{ر_م} = \frac{ك\,\overrightarrow{ر_م} - ك_1\,\overrightarrow{ر_1}}{ك - ك_1}$$

ويمكن كتابة العلاقة الاتجاهية السابقة بدلالة المركبات فى اتجاه محاور الإحداثيات المتعامدة $\overrightarrow{و س}$ ، $\overrightarrow{و ص}$ فتحصل على الآتى :

$$س_م = \frac{ك\,س_م - ك_1\,س_1}{ك - ك_1} \quad ، \quad ص_م = \frac{ك\,ص_م - ك_1\,ص_1}{ك - ك_1}$$

**❋ تماثل صفيحة هندسية رقيقة منتظمة الكثافة :** إذا وُجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ، فإن مركز ثقلها يقع على خط هذا المحور.

**❋ تماثل مجسم هندسى منتظم الكثافة :** إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة ، وقع مركز ثقله فى هذا المستوى.

**❋ بعض الحالات الخاصة لمركز الثقل :**

- مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة.
- مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة محدود بدائرة يقع فى مركز الدائرة.
- مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.
- مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.
- مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى مركزه الهندسى.
- مركز ثقل قشرة اسطوانة دائرية قائمة منتظمة الكثافة ، يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى قاعدتيها.

- مركز ثقل اسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة ، يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى قاعدتيها.
- مركز ثقل منشور قائم منتظم يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الموازية لأحرفه الجانبية والمارة بمركزى ثقل قاعدتيه ، باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.